

Curso MaxFEM

parte teórica

El proyecto CloudPYME (id: 0682_CLOUDPYME2_1_E) está cofinanciado por la [Comisión Europea](#) a través de el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER), dentro de la tercera convocatoria de proyectos del Programa Operativo de Cooperación Transfronteriza España-Portugal 2007-2013 ([POCTEP](#)).

¿QUÉ ES *maxFEM*?

- Paquete de **software libre** para la simulación numérica de problemas de electromagnetismo en baja frecuencia.
- Resolución basada en el método de elementos finitos.
- **Adaptabilidad**: el usuario puede realizar cambios tanto en la interfaz como en los programas de cálculo.
- Software **multiplataforma** (Windows, Linux y MacOS).
- **Abierto**: el usuario puede incorporar otro tipo de problemas gracias a la estructura modular de la interfaz.
- Descarga del software:

<http://www.usc.es/es/proyectos/maxfem/>

ECUACIONES DE MAXWELL EN FORMA INTEGRAL

- Ley de Gauss del campo eléctrico $\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_{\text{encerrada}}}{\epsilon}$
- Ley de Gauss del campo magnético $\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$
- Ley de inducción de Faraday $\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$
- Ley de Ampère-Maxwell $\oint_L \frac{\mathbf{B}}{\mu} \cdot d\mathbf{l} = I_S + \frac{d}{dt} \iint_S \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$
- Leyes constitutivas $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$
- Ley de Ohm $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$

ECUACIONES DE MAXWELL EN FORMA DIFERENCIAL

- Ley de Gauss del campo eléctrico $\operatorname{div}(\mathbf{D}) = \rho$
- Ley de Gauss del campo magnético $\operatorname{div}(\mathbf{B}) = 0$
- Ley de inducción de Faraday $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\mathbf{E}) = \mathbf{0}$
- Ley de Ampère-Maxwell $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} = \operatorname{rot}(\mathbf{H})$
- Leyes constitutivas $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$
- Ley de Ohm $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$

- Solamente existen cargas en reposo.
- Ecuaciones:
 - $div(\mathbf{D}) = \rho$
 - $rot(\mathbf{E}) = \mathbf{0}$
 - $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$
- Formulación utilizada:
 - $div(\varepsilon(\theta)\mathbf{grad}(V)) = \rho$ ($\equiv \rho_v, \sigma, \lambda, \rho_p$)
- Condiciones de contorno
 - Dirichlet: valor de V en la frontera
 - Neumann: valor de $\varepsilon \frac{\partial V}{\partial n}$ en la frontera ($\varepsilon \frac{\partial V}{\partial n} = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}$), densidad de carga superficial

EJEMPLO 1: ELECTROSTÁTICA 2D

- Condensador plano
- Dos placas conductoras paralelas e infinitas separadas una distancia d .
- Región entre las placas formada por un dieléctrico de permitividad ε
- Fuente en el dieléctrico: densidad volumétrica de carga ρ .



- Cálculo de la solución analítica:

- Resolución de la EDP

- ε constante, fuente volúmica ρ_v

$$- \operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{grad}(V)) = -\varepsilon \operatorname{div} (\mathbf{grad}(V)) = \rho_v$$

- Como las placas son infinitas en las direcciones x, z , por simetría tenemos que $V(x, y, z) \equiv V(y)$ y por tanto:

$$\mathbf{grad}(V) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \operatorname{div} (\mathbf{grad}(V)) = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

- Ecuación a resolver: $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}$
 - Solución general de la ecuación:

$$V(y) = -\frac{\rho_v}{2\varepsilon} y^2 + C_1 y + C_2$$

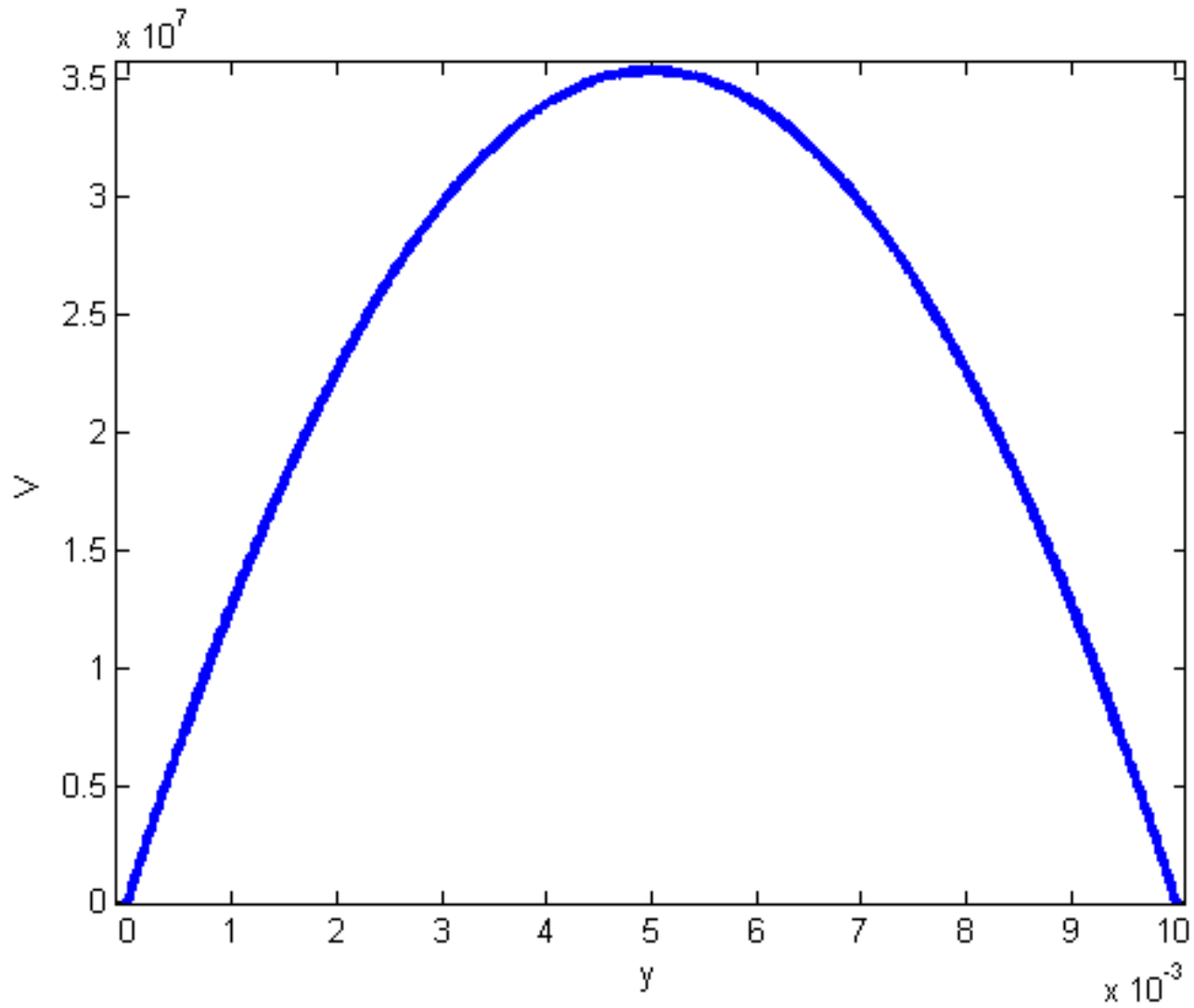


- Aplicación de las condiciones de contorno:
 - $V = V_0$ en la placa inferior

$$V(y) = -\frac{\rho}{2\varepsilon}y^2 + C_1y + V_0$$

- $V = V_1$ en la placa superior

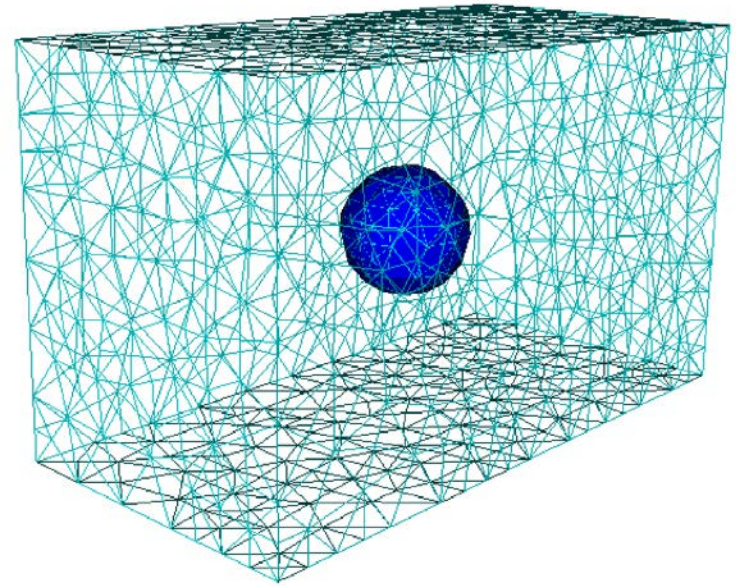
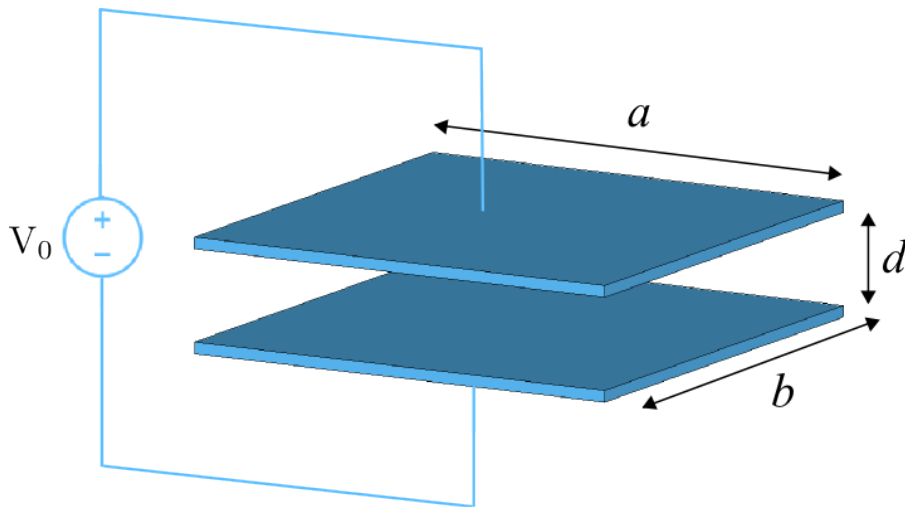
$$V(y) = -\frac{\rho}{2\varepsilon}y^2 + \left(\frac{V_1 - V_0}{d} + \frac{\rho d}{2\varepsilon}\right)y + V_0$$



- Un único material de permitividad eléctrica ε constante.
- Condiciones de contorno:
 - $V = V_0, V = V_1$ en las fronteras horizontales.
 - $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$ en las fronteras verticales (no es necesario especificarla).
- Fuente: densidad de carga ρ .
- No se necesita fichero de temperatura.

EJEMPLO 2: ELECTROSTÁTICA 3D

- Condensador plano con discontinuidades en el dieléctrico.
- Estudiamos un condensador con una burbuja de aire esférica.
- Despreciamos los efectos de borde.



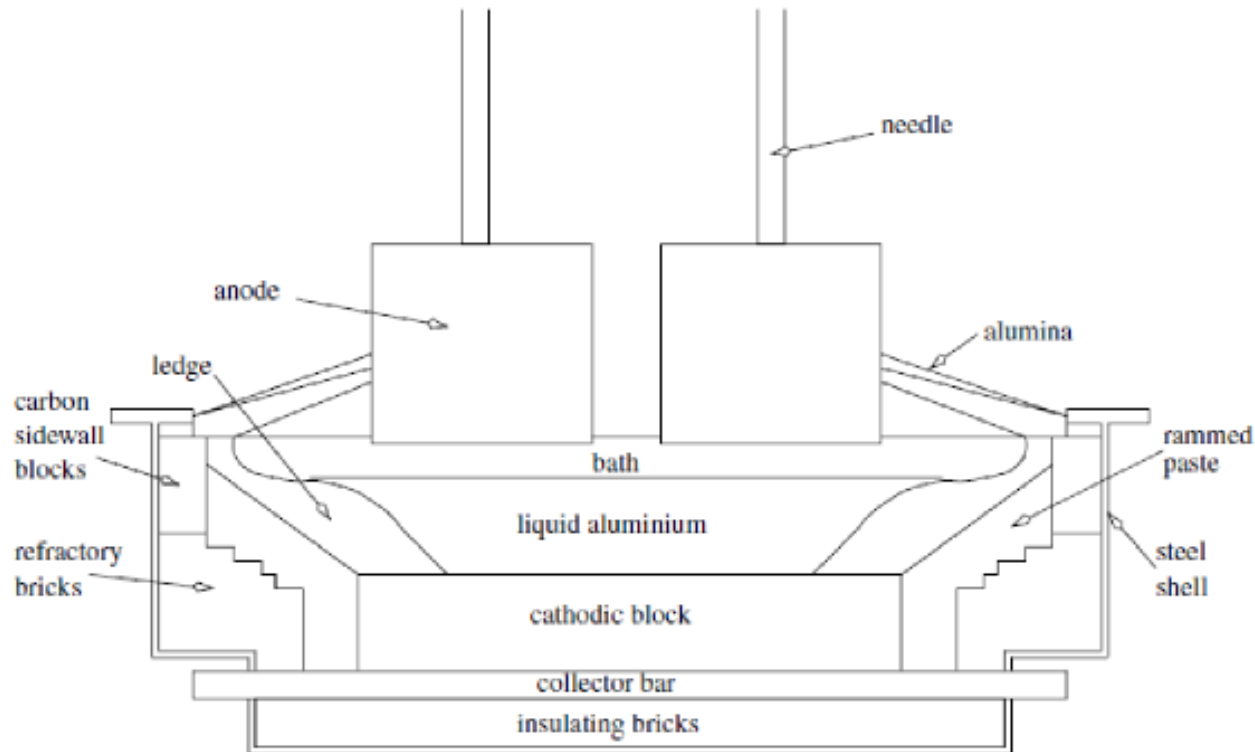
- Dos materiales:
 - Dieléctrico del condensador.
 - Aire en la burbuja.
- Condiciones de contorno:
 - $V = V_0, V = V_1$ en las fronteras horizontales (placas).
 - $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$ en el resto de fronteras.
- No imponemos ninguna densidad de carga.
- No se necesita fichero de temperatura.

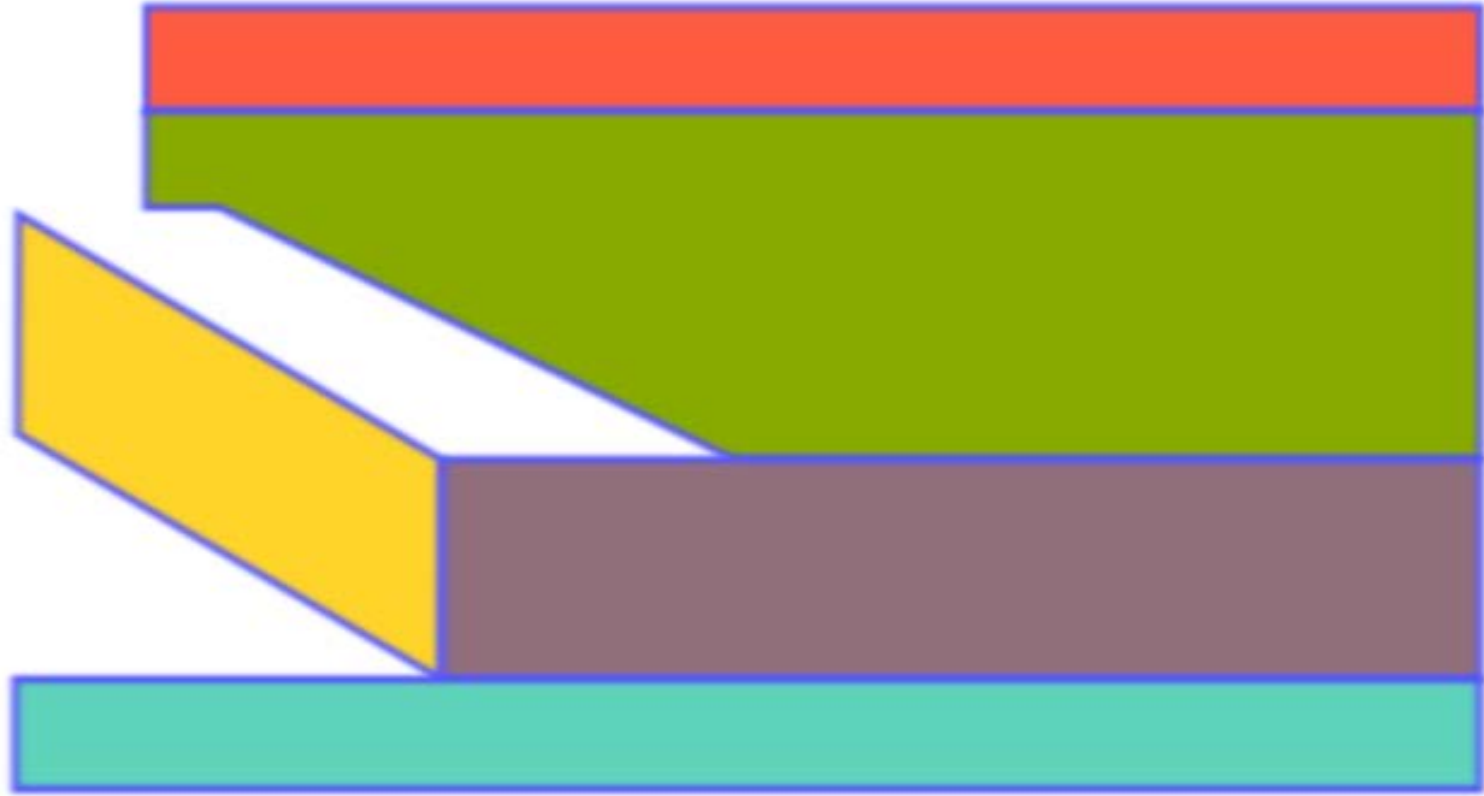
CORRIENTE CONTINUA (2D/3D)

- Cargas y corrientes independientes del tiempo. Solamente dominios conductores. Finalidad: determinar el campo eléctrico.
- Ecuaciones:
 - $\text{rot}(\mathbf{E}) = \mathbf{0}, \text{rot}(\mathbf{H}) = \mathbf{J}$
 - $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$
- Formulación utilizada:
$$- \text{div} \left(\sigma(\theta) \mathbf{grad}(V) \right) = 0$$
- Condiciones de contorno
 - Dirichlet: valor de V en la frontera
 - Neumann: valor de $\sigma \frac{\partial V}{\partial n}$ en la frontera $\left(\sigma \frac{\partial V}{\partial n} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \right)$ densidad de corriente entrante en el dominio.
 - Neumann: valor de la intensidad I entrante en el dominio.

EJEMPLO 3: DIRECT CURRENT 2D

- Cuba electrolítica para la producción de aluminio.

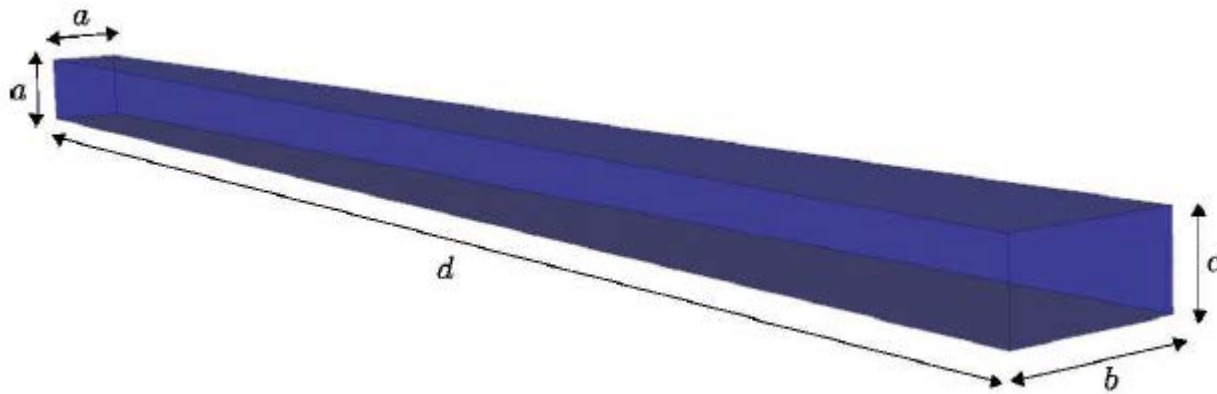




- Varios materiales, todos ellos con conductividad eléctrica constante:
 - Barra colectora.
 - Bloque catódico.
 - Pasta.
 - Aluminio líquido.
 - Baño electrolítico.
- Condiciones de contorno:
 - Voltaje $V = V_0$ en la frontera superior del baño.
 - Densidad de corriente entrante en la barra colectora.
- No es necesario proporcionar un fichero de temperaturas.

EJEMPLO 4: DIRECT CURRENT 3D

- Barra conductora de cobre atravesada por una corriente.



- Un único material con conductividad eléctrica constante.
- Condiciones de contorno
 - Potencial en la tapa trasera de la barra $V = V_0$.
 - Potencial en la tapa delantera de la barra $V = V_1$.
- No es necesario proporcionar un fichero de temperaturas.

MAGNETOSTÁTICA (2D)

- Corrientes independientes del tiempo. Determinar el campo magnético.
- Ecuaciones:
 - $\mathbf{rot}(\mathbf{H}) = \mathbf{J}$
 - $\mathbf{div}(\mathbf{B}) = 0$
 - $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$

- Formulación utilizada:

$$\mathbf{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot}(A_z \mathbf{e}_z) \right) \cdot \mathbf{e}_z = J_z$$

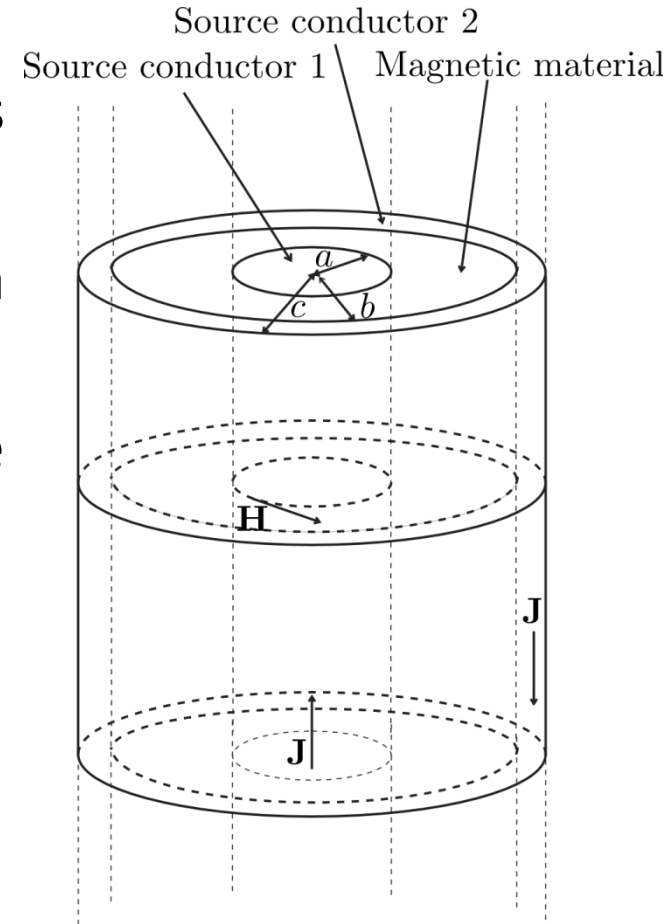
- Condiciones de contorno:

- Dirichlet: valor de A_z en la frontera
- Neumann: valor de $\frac{1}{\mu} \mathbf{rot}(A_z \mathbf{e}_z) \times \mathbf{n}$ en la frontera $\left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot}(\mathbf{A}) \times \mathbf{n} = \mathbf{H} \times \mathbf{n} \right)$

EJEMPLO 5: MAGNETOSTÁTICA 2D

- Conductores coaxiales infinitos separados por un material magnético.
- Los conductores transportan la misma intensidad en dirección opuesta.
- La fuente del problema será la densidad de corriente:

$$J(\rho) = \begin{cases} \frac{I}{\pi a^2} \mathbf{e}_z & 0 \leq \rho < a \\ \mathbf{0} & a \leq \rho < b \\ \frac{I}{\pi (c^2 - b^2)} (-\mathbf{e}_z) & b \leq \rho < c \end{cases}$$



- Cálculo de la solución analítica:

- Resolución de la EDP

- μ constante, fuente volúmica J

$$\mathit{rot}(\mathbf{H}) = \mathbf{J}$$

- Como los conductores son infinitos en la dirección z y la fuente es de la forma $\mathbf{J}(\rho, \theta, z) \equiv J_z(\rho)\mathbf{e}_z$, por simetría se tiene que $\mathbf{H}(\rho, \theta, z) \equiv H_\theta(\rho)\mathbf{e}_\theta$ y por tanto:

$$\begin{aligned} \mathit{rot}(\mathbf{H}) &= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\theta + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho H_\theta)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_z \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho H_\theta)}{\partial \rho} \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

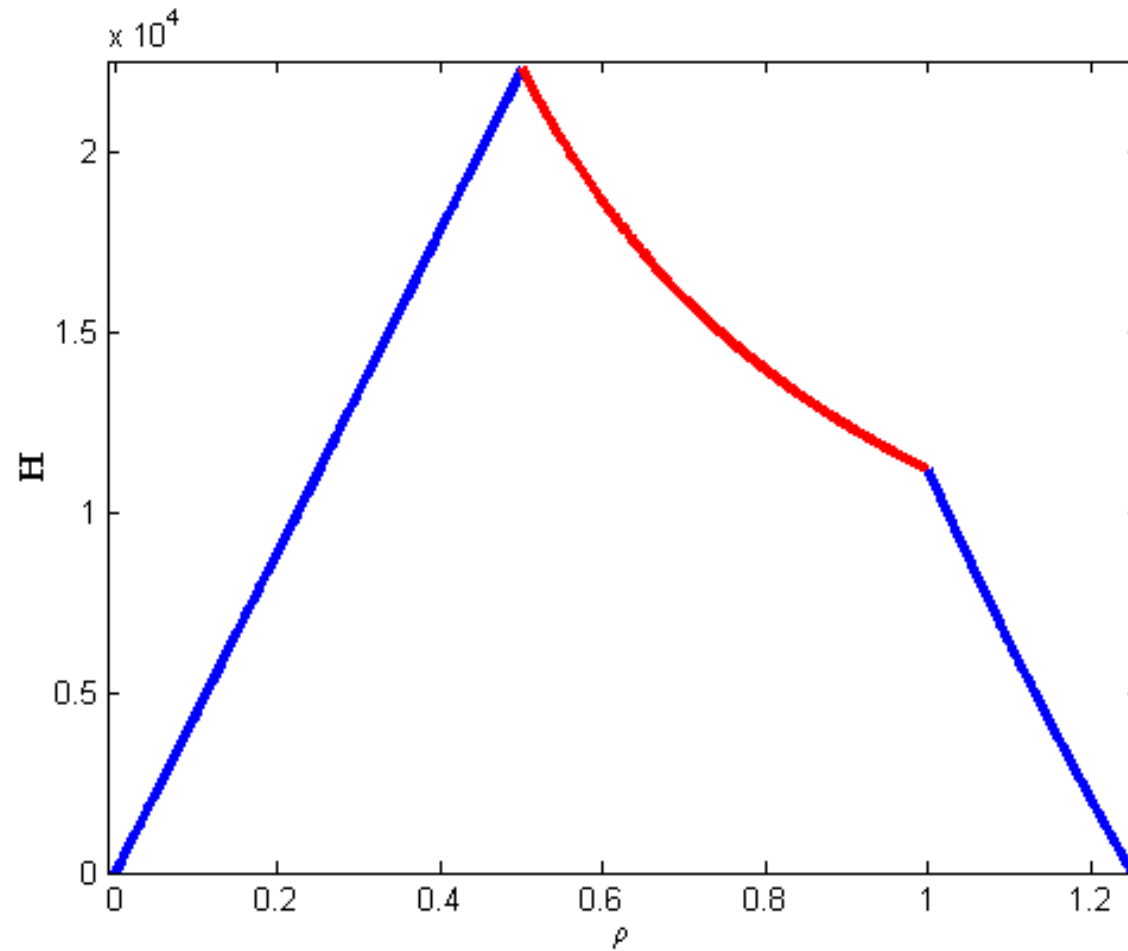
- Ecuación a resolver: $\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho H_\theta)}{\partial \rho} = J_z$

- Solución general de la ecuación:

$$H_{\theta}(\rho) = J_z \frac{\rho}{2} + \frac{C}{\rho}$$

- Aplicación de la continuidad de la solución:

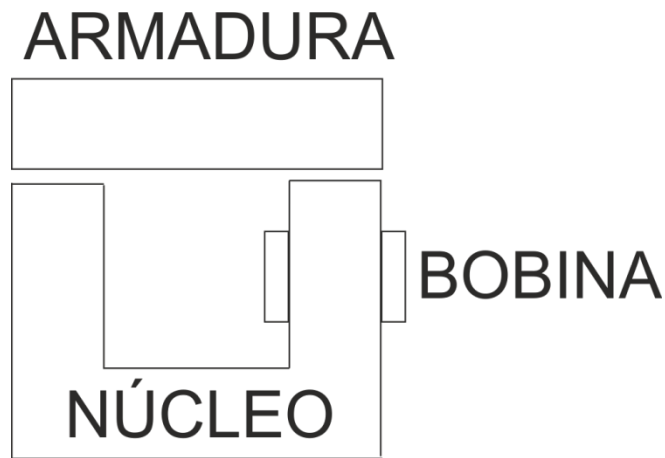
$$\mathbf{H}(\rho) = \begin{cases} \frac{\rho I}{2\pi a^2} \mathbf{e}_{\theta} & 0 \leq \rho < a \\ \frac{I}{2\pi \rho} \mathbf{e}_{\theta} & a \leq \rho < b \\ \left\{ -\frac{\rho I}{2\pi (c^2 - b^2)} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{I}{2\pi} + \frac{b^2 I}{2\pi (c^2 - b^2)} \right] \right\} \mathbf{e}_{\theta} & b \leq \rho < c \end{cases}$$



- Dos materiales:
 - Un material de permeabilidad magnética constante μ (lineal).
 - Un material con permeabilidad μ_0 .
- Condición de contorno: $A_z = 0$.
- Fuente: densidad de corriente volumétrica dada a través de la intensidad constante I .

EJEMPLO 6: MAGNETOSTÁTICA 2D

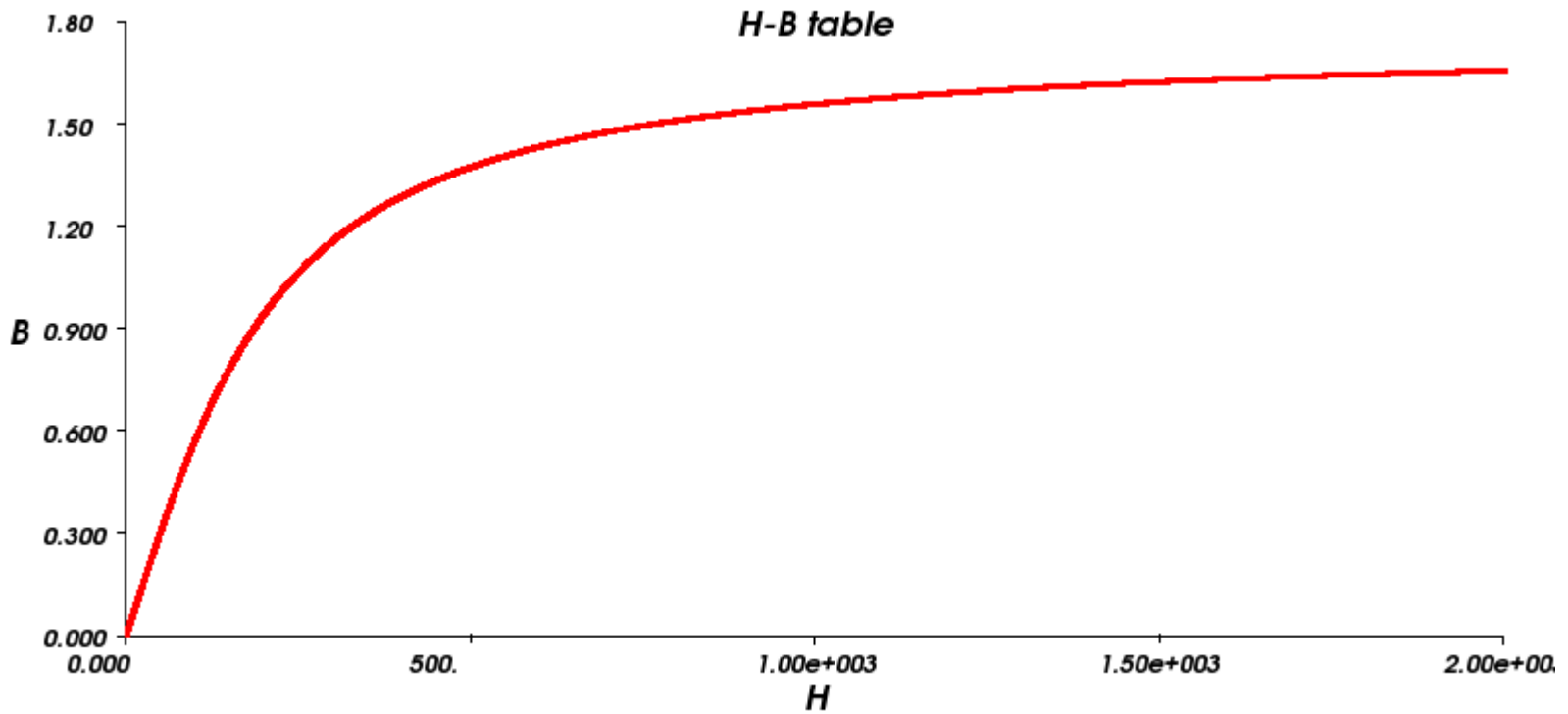
- Un contactor electromagnético “tipo-E” es un componente electromecánico que establece o interrumpe el paso de corriente en un circuito
- Simularemos una versión simplificada:
 - La parte móvil (armadura) será fija
 - No estará presente ningún imán permanente



- Dos materiales:
 - Vacío en la bobina.
 - Armadura y núcleo de un material magnético no lineal (descrito por una tabla BH).
- Condición de contorno: $A_z = 0$ en una frontera exterior suficientemente alejada del dispositivo.
- Fuente: densidad de corriente uniforme J_z (volumétrica).
- Parámetros para la resolución de la no linealidad: máximo número de iteraciones y tolerancia.

- Ley B-H:

$$B = \mu_0 H + \frac{2J_s}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\pi(\mu - \mu_0)}{2J_s} H \right)$$



MaxFEM

TRANSIENT MAGNETICS (2D)

- Baja frecuencia (despreciamos el término en desplazamiento eléctrico).
- Dependencia arbitraria del tiempo para las fuentes.
- Fuentes:
 - densidad de corriente,
 - intensidad,
 - caída de potencial.
- Conductores: stranded.
- No se calculan corrientes inducidas.

- Ecuaciones:

- $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{rot}(\mathbf{E}) = \mathbf{0}$
- $\mathit{div}(\mathbf{B}) = 0$
- $\mathbf{rot}(\mathbf{H}) = \mathbf{J}$
- $\mathbf{rot}(\mathbf{E}) = \mathbf{0}$
- $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$

- Formulación utilizada:

$$\frac{1}{\mathit{medida}(\Omega_n)} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_n} \sigma A_z(x, y, t) dx dy \mathbf{e}_z + \mathbf{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot}(\mathbf{A}) \right) = - \frac{V_n(t)}{\mathit{medida}(\Omega_n)} \int_{\Omega_n} \sigma dx dy$$

$$\mathbf{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot}(\mathbf{A}) \right) = \frac{I_n(t)}{\mathit{medida}(\Omega_n)} \mathbf{e}_z \text{ en } \Omega_n, \quad \mathbf{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot}(\mathbf{A}) \right) = \mathbf{0} \text{ en } \Omega_0$$

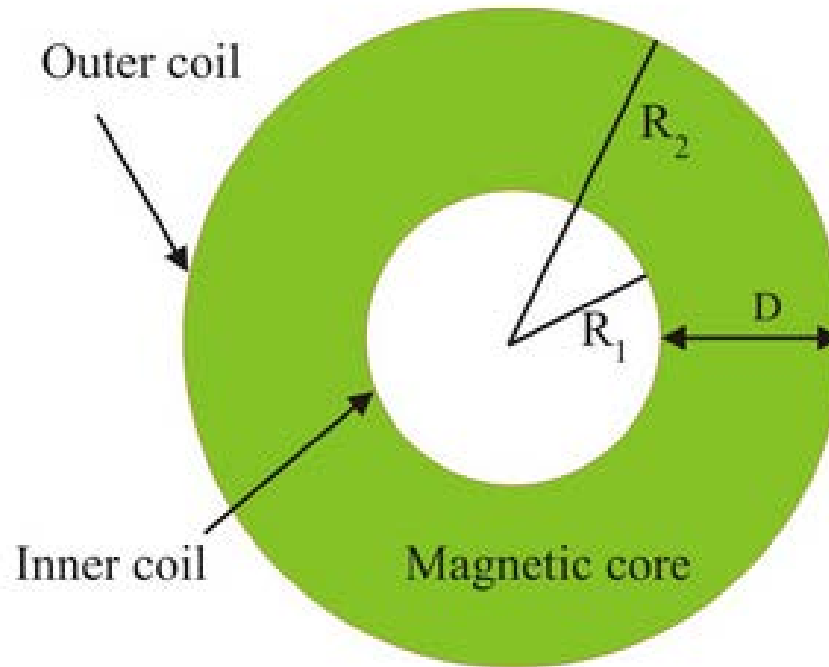
- Condiciones de contorno

- Dirichlet: valor de A_z en la frontera

- Neumann: valor de $\frac{1}{\mu} \mathbf{rot}(A_z \mathbf{e}_z) \times \mathbf{n}$ en la frontera $\left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot}(A) \times \mathbf{n} = \mathbf{H} \times \mathbf{n} \right)$

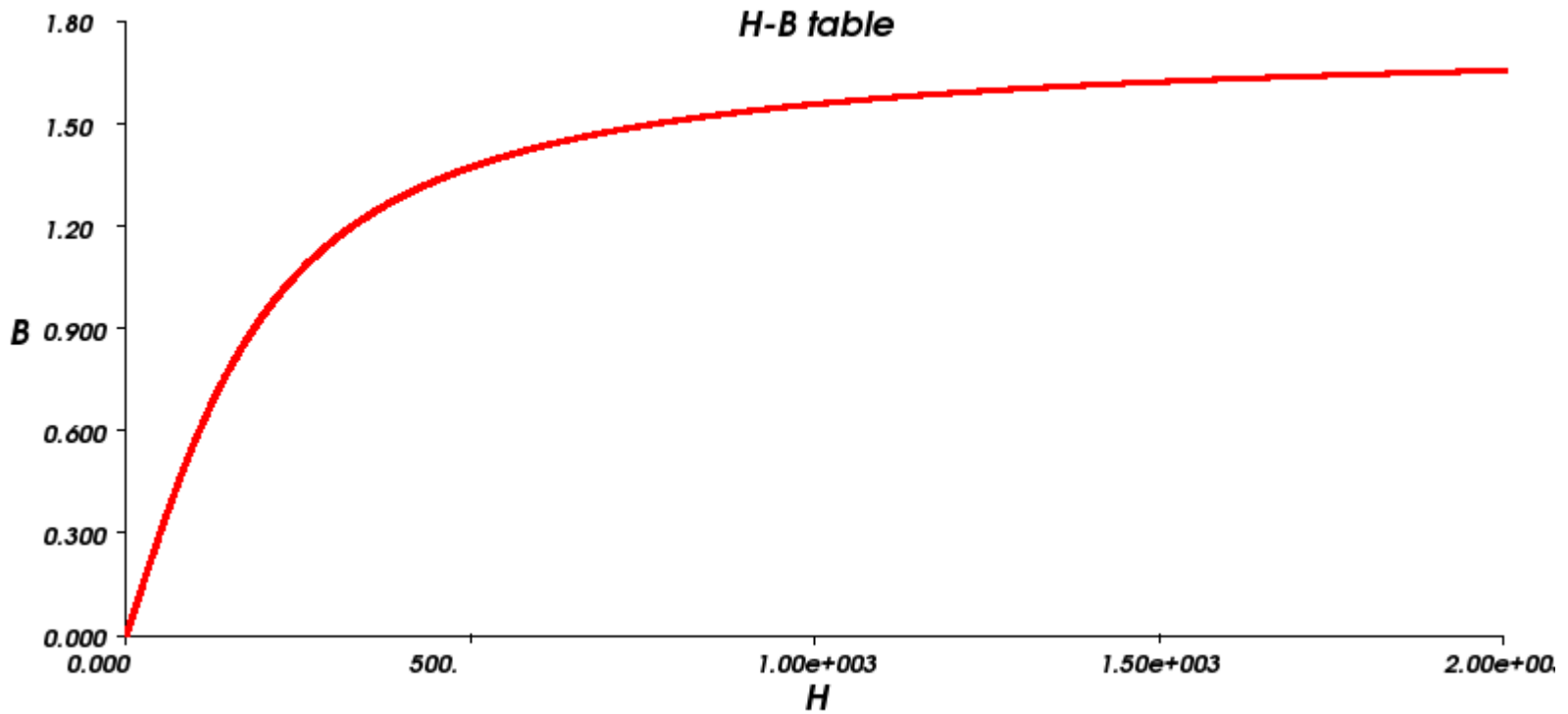
EJEMPLO 7: TRANSIENT MAGNETICS 2D

- Núcleo cilíndrico infinito compuesto de un material magnético, rodeado de un conductor infinitamente fino en el que existe una corriente superficial.



- Ley B-H:

$$B = \mu_0 H + \frac{2J_s}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\pi(\mu - \mu_0)}{2J_s} H \right)$$



MaxFEM

- Dos materiales:
 - Aire rodeando al dispositivo.
 - Material magnéticamente no lineal y conductor en el núcleo.
- Condición de contorno: $A_z = 0$ en la frontera exterior del dominio.
- Fuente superficial: caída de potencial (conductores acoplados)
 $\Delta V = V_{n_1} - V_{n_2}$.
- Intervalo de tiempo.
- Parámetros para la resolución de la no linealidad: máximo número de iteraciones y tolerancia.

EDDY CURRENTS

- Baja frecuencia (despreciamos el término en desplazamiento eléctrico).
- Régimen armónico: los campos se escriben en la forma $\mathcal{F}(\mathbf{x}, t) = \text{Re}(\mathbb{F}(\mathbf{x})e^{i\omega t})$, con $\mathbb{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$
- Problemas: 2D plano, 2D axisimétrico, 3D
- Ecuaciones:
 - $i\omega\mathbf{B} + \text{rot}(\mathbf{E}) = \mathbf{0}$
 - $\text{div}(\mathbf{B}) = 0$
 - $\text{rot}(\mathbf{H}) = \mathbf{J}$
 - $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$

EFECTO PIEL

- Tendencia de la corriente alterna a concentrarse en la zona cercana a la superficie exterior del conductor que la transporta.
- Suponemos una solución de tipo onda plana de las ecuaciones de Maxwell en régimen armónico que penetra en un dominio conductor. Entonces la constante de atenuación de la onda es:

$$\alpha = \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} - 1 \right]^{1/2} \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

- Por tanto, la profundidad de la piel es: $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$

EDDY CURRENTS 2D PLANO

- Fuentes: densidad de corriente, intensidad, caída de potencial.
- Conductores: stranded, solid
- Formulación:

$$i\omega\sigma A_z + \text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot}(A_z) \right) = -\sigma V_n,$$

$$i\omega \int_{\Omega_n} \sigma A_z dx dy + I_n = -V_n \int_{\Omega_n} \sigma dx dy,$$

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot}(A_z \mathbf{e}_z) \right) \cdot \mathbf{e}_z = J_z.$$

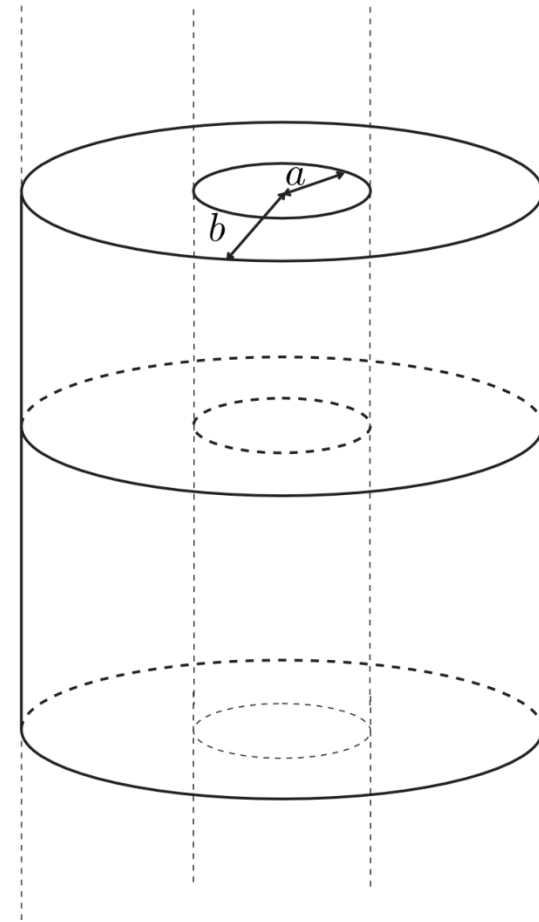
- Condiciones de contorno
 - Dirichlet: valor de A_z en la frontera
 - Neumann: valor de $\frac{1}{\mu} \text{rot}(A_z \mathbf{e}_z) \times \mathbf{n}$ en la frontera $\left(\frac{1}{\mu} \text{rot}(A) \times \mathbf{n} = \mathbf{H} \times \mathbf{n} \right)$

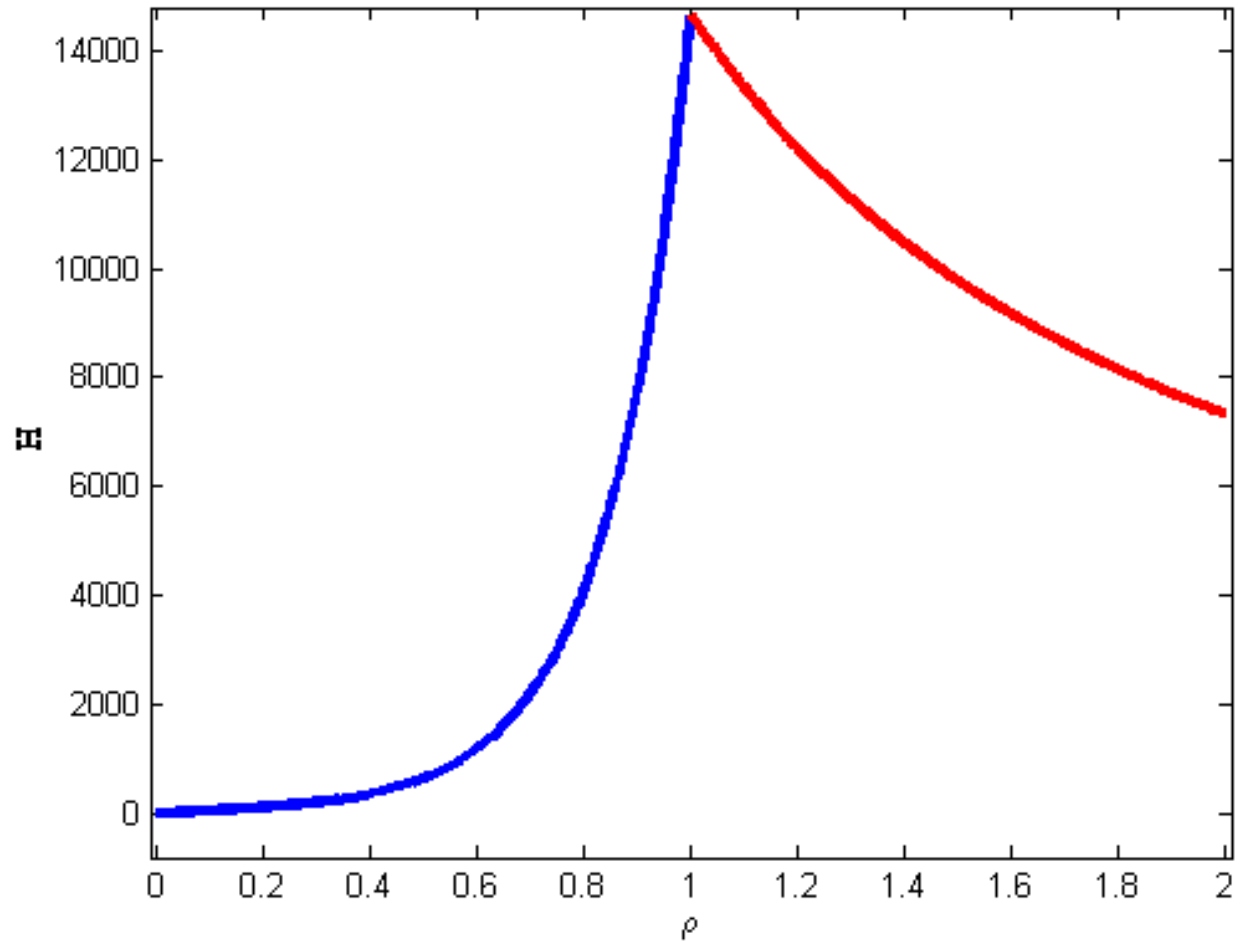
EJEMPLO 8: EDDY CURRENTS 2D

- Un conductor infinito rodeado por un material dieléctrico.
- La fuente del problema será la intensidad de corriente total, $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$, que circula por el conductor.
- Solución analítica:

$$\mathbb{H}(\rho, t) = \begin{cases} \frac{I_0}{2\pi a} \frac{\mathcal{J}_1(\rho\sqrt{i\omega\mu\sigma})}{\mathcal{J}_1(a\sqrt{i\omega\mu\sigma})} \mathbf{e}_\theta & 0 \leq \rho < a \\ \frac{I_0}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\theta & a \leq \rho < b \end{cases}$$

donde \mathcal{J}_1 denota la primera función de Bessel modificada de orden 1.





- Cálculo de la solución analítica:
 - Resolución de la EDP
 - μ y σ constantes en cada dominio
 - $i\omega\mu\mathbf{H} + \mathbf{rot}(\mathbf{E}) = \mathbf{0}$
 - $\mathbf{rot}(\mathbf{H}) = \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ en el conductor, $\mathbf{rot}(\mathbf{H}) = \mathbf{0}$ en el dieléctrico

$$i\omega\mu\mathbf{H} + \mathbf{rot}\left(\frac{1}{\sigma}\mathbf{rot}(\mathbf{H})\right) = \mathbf{0} \text{ en el conductor,}$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{H}) = \mathbf{0} \text{ en el dieléctrico}$$

- Como los dominios son infinitos en la dirección z y la fuente es de la forma $\mathbf{J}(\rho, \theta, z) \equiv J_z(\rho)\mathbf{e}_z$, por simetría se tiene que $\mathbf{H}(\rho, \theta, z, t) \equiv H_\theta(\rho, t)\mathbf{e}_\theta$ y por tanto:

$$i\omega\mu H_\theta - \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\sigma\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho H_\theta)\right) = 0 \quad \text{si } 0 \leq \rho < a,$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho H_\theta) = 0 \quad \text{si } a \leq \rho < b$$

- Haciendo el cambio de variable $\gamma = \rho\sqrt{i\omega\mu\sigma}$, en el conductor

$$\gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} H_\theta(\gamma) + \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} H_\theta(\gamma) - (\gamma^2 + 1)H_\theta(\gamma) = 0 \quad \text{si } 0 \leq \gamma < \sqrt{i\omega\mu\sigma}a$$

cuya solución general es:

$$H_\theta(\gamma) = C_1 \mathcal{J}_1(\rho\sqrt{i\omega\mu\sigma}) + C_2 \mathcal{K}_1(\rho\sqrt{i\omega\mu\sigma})$$

- En el dieléctrico:

$$H_\theta(\rho) = \frac{C_3}{\rho} + C_4$$

- Aplicación de la continuidad de la solución y las condiciones:

$$H_\theta(0) < \infty, H_\theta(a) = \frac{I_0}{2\pi a}$$

- Dos materiales:
 - Un material de permeabilidad magnética μ y conductividad σ constantes (conductor).
 - Un material de permeabilidad μ_0 y conductividad nula (dieléctrico).
- Condición de contorno: $A_z = 0$ en la frontera exterior.
- Fuente: intensidad I .
- Dato del problema: frecuencia de trabajo ω .

EDDY CURRENTS 2D AXISIMÉTRICO

- Fuentes: densidad de corriente, intensidad, caída de potencial.
- Conductores: stranded, solid
- Formulación:

$$i\omega\sigma A_\theta + \text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot}(A_\theta) \right) = -\frac{\sigma V_n}{2\pi\rho},$$

$$i\omega \int_{\Omega_n} \sigma A_\theta d\rho dz + I_n = -\frac{V_n}{2\pi} \int_{\Omega_n} \frac{\sigma}{\rho} d\rho dz,$$

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot}(A_\theta \mathbf{e}_\theta) \right) \cdot \mathbf{e}_\theta = J_\theta.$$

- Condiciones de contorno
 - Dirichlet: valor de A_θ en la frontera
 - Neumann: valor de $\frac{1}{\mu} \text{rot}(A_\theta \mathbf{e}_\theta) \times \mathbf{n}$ en la frontera $\left(\frac{1}{\mu} \text{rot}(\mathbf{A}) \times \mathbf{n} = \mathbf{H} \times \mathbf{n} \right)$

EJEMPLO 9: EDDY CURRENTS AXISIMÉTRICO

- El ejemplo está basado en un horno de inducción usado en la industria metalúrgica para purificar metales.
- Componentes principales:
 - Bobina conectada a una fuente de potencia (armónica)
 - Crisol hecho de un material conductor
 - Material a fundir
- Cuando la carga del horno se funde la fuerza de Lorentz tiende a mover el metal. En función del movimiento inducido las impurezas se acumularán en diferentes zonas del metal cuando éste se enfríe.
- Con MaxFEM solamente se simula la parte electromagnética del proceso.

- Tres materiales:
 - Aire en las bobinas.
 - Material conductor en el crisol.
 - Material conductor en el metal.
- Condiciones de contorno:
 - $A_\theta = 0$ en una frontera exterior suficientemente alejada del dispositivo.
 - $A_\theta = 0$ en el eje de simetría.
- Fuente: intensidad I (solid conductor) en las bobinas, caída de potencial (solid conductor) nula en el crisol y el metal.
- Dato del problema: frecuencia de trabajo ω .

- Las fuentes se imponen como una condición de contorno. Solamente fuentes de intensidad (solid conductor).
- Formulación:

$$i\omega\mu\mathbf{H} + \mathbf{rot}(\mathbf{E}) = \mathbf{0} \text{ en } \Omega_{conductor} \cup \Omega_{dieléctrico}$$

$$\mathbf{div}(\mu\mathbf{H}) = 0 \text{ en } \Omega_{conductor} \cup \Omega_{dieléctrico}$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{H}) = \sigma \mathbf{E} \text{ en } \Omega_{conductor}$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{H}) = \mathbf{0} \text{ en } \Omega_{dieléctrico}$$

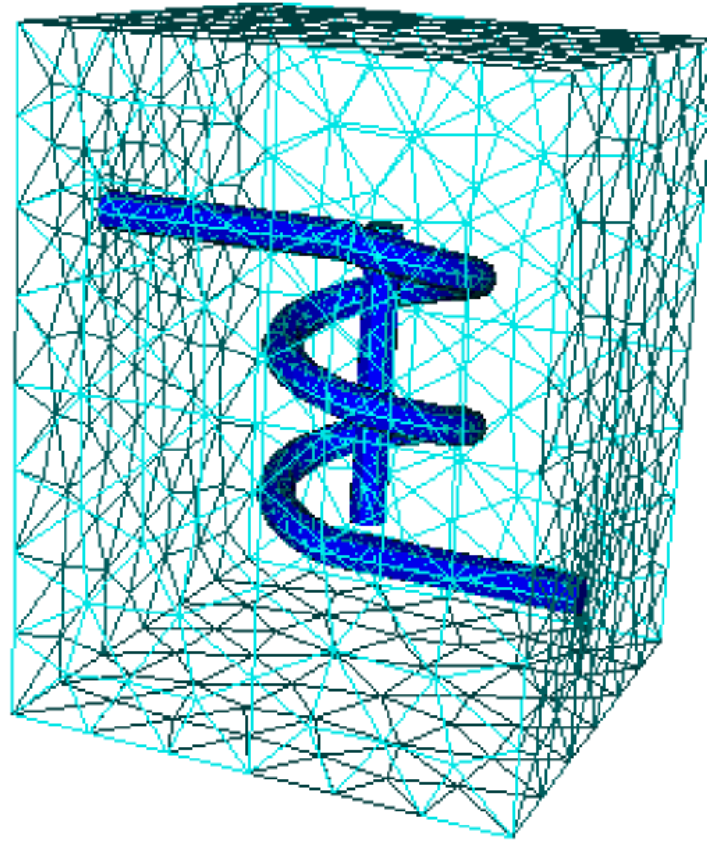
- Condiciones de contorno

- $$\int_{\Gamma_J} \mathbf{rot}(\mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} = I_n$$

- Frontera del dieléctrico: deben indicarse, por separado, las componentes conexas de la frontera del dieléctrico

EJEMPLO 10: EDDY CURRENTS 3D

- Inducción en una barra conductora por una espira elíptica.



- Dos mallas:
 - Malla del dominio dieléctrico.
 - Malla de todo el dominio.
- Tres materiales:
 - Aire que rodea el dispositivo.
 - Conductor en el que se induce corriente.
 - Material conductor en la bobina.
- Condiciones de contorno:
 - Frontera del dieléctrico. Dos condiciones puesto que tenemos dos componentes conexas.
 - Intensidad en uno de los extremos de la bobina.
- Frecuencia de trabajo.

